Universität
Zürich UZH

Philosophisches Seminar

Einführung in die formale Logik II

Herbstsemester 2019

Vorlesung 9

Prof. Dr. Katia Saporiti

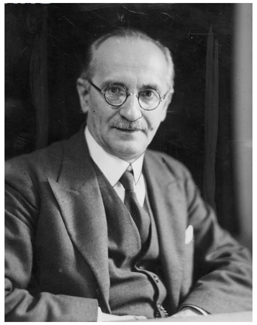
Erinnerung:
Am 18.11.2019 entfällt die
Vorlesung!

Axiomatischer Kalkül und Kalkül des natürlichen Schliessens

Kalküle

- Die Begriffe der Ableitung (einer Aussage aus anderen Aussagen) und des Beweises sind *vollständig* ***formalisierbar***.
- ***Formale*** Ableitungen und Beweise nehmen nur auf die äussere, rein syntaktisch beschreibbare Gestalt von Sätzen (logischer Sprachen) Bezug.
- Ableitungen und Beweise sind aus elementaren Schritten zusammengesetzt, wobei jeder einzelne Schritt ein Anwendungsfall einer formalen Regel ist.
- Die ersten Kalküle für die Quantorenlogik (und als Teil davon die Aussagenlogik) waren axiomatische Kalküle mit zwei Arten von Bestimmungen (durch die zum einen die Axiome und zum anderen die Grundschlussregeln festgelegt werden).
- Ein ***Beweis*** in einem axiomatischen Kalkül ist eine Folge von Sätzen, wobei jeder Satz der Folge entweder ein Axiom ist oder aus Sätzen, die ihm in der Folge vorangehen, unmittelbar durch Anwendung einer Schlussregel gewonnen werden kann.
- Eine ***Ableitung*** eines Satzes aus einer Menge von Prämissen ist ein Beweis, in dem neben den Axiomen auch die Elemente der Menge der Prämissen vorausgesetzt werden dürfen.
- (Ein Beweis kann daher als eine Ableitung aus der leeren Menge aufgefasst werden.)

Axiomatischer Kalkül für AL



Jan Łukasiewicz
(1878-1956)

Axiome:

1. $(p \to (q \to p))$

2. $\big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$

3. $((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$

Grundschlussregel (*modus ponens*):

Aus den Sätzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gewinnt man den Satz $\mathcal{B}$.

- (Substitutionsregel): Gleiche Satzkonstanten in einem Axiom können durch gleiche AL-Formeln ersetzt werden.
- Alle Junktoren können auf die Negation und das Konditional (die materiale Implikation) zurückgeführt werden. Deshalb sind keine weiteren Regeln notwendig.
  - $p \vee q =_{df} \neg p \to q$
  - $p \wedge q =_{df} \neg(p \to \neg q)$
  - $p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p) =_{df} \neg((p \to q) \to \neg(q \to p))$

Beweis und Ableitung im axiomatischen Kalkül

– Ein ***Beweis*** für einen aussagenlogischen Satz $\mathcal{A}$ ist eine endliche Folge von Sätzen, deren letztes Glied $\mathcal{A}$ ist und deren Glieder entweder Axiome sind oder durch die Anwendung der Grundschlussregel (oder durch die Substitution gleicher Formeln für gleiche Konstanten in einem Axiom) auf vorhergehende Glieder der Folge hervorgehen.

– Ein Satz $\mathcal{A}$ ist genau dann ***beweisbar***, wenn es einen Beweis für $\mathcal{A}$ gibt.

– Ein Satz $\mathcal{B}$ ist ist genau dann aus den Sätzen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ ***ableitbar***, wenn $\mathcal{B}$ durch die Hinzunahme von $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ zu den Axiomen beweisbar ist.

– Eine ***Ableitung*** eines Satzes $\mathcal{B}$ aus aus den Sätzen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ (aus der Menge von Sätzen $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n\}$) ist eine endliche Folge von Sätzen, deren letztes Glied $\mathcal{B}$ ist und deren sämtliche Glieder Axiome oder Elemente der Menge $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n\}$ sind oder aus der Anwendung der Grundschluss- oder der Substitutionsregel auf vorhergehende Glieder der Folge hervorgehen.

– Ein ***Beweis*** kann als Ableitung aus der leeren Menge aufgefasst werden.

Beweis im axiomatischen Kalkül für: $(p \rightarrow p)$

Axiome:	***Schlussregel (modus ponens):***
1. $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$	***Aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ gewinnt man $\mathcal{B}$.***
2. $\big((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))\big)$	***Substitution: Gleiche Satzkonstanten dürfen durch gleiche Formeln ersetzt werden.***
3. $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$	

1. $\big(p \rightarrow (q \rightarrow p)\big)$	*Axiom 1*
2. $\big(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)\big)$	*subst. in 1:* $(q \rightarrow p)/q$
3. $\Big(\big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)\big)\Big)$	*Axiom 2*
4. $\Big(\big(p \rightarrow (q \rightarrow p)\big) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)\big)\Big)$	*subst. in 3 :* p/r
5. $\Big(\big(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)\big) \rightarrow \big((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)\big)\Big)$	*subst. in 4:* $(q \rightarrow p)/q$
6. $\big(p \rightarrow (q \rightarrow p)\big) \rightarrow (p \rightarrow p)$	*5 & 2 modus ponens*
7. $(p \rightarrow p)$	*6 & 1 modus ponens*

Axiomatischer Kalkül für PL (Hilbert-Kalkül)

David Hilbert (1862-1943)

Axiomenschemata:

$(J)\quad \mathcal{A}, falls \vdash_j \mathcal{A}$

(alle junktorenlogisch wahren Sätze)

$(A)\quad \forall\xi\mathcal{A}_{[\xi]} \to \mathcal{A}_{[\alpha]}$

(Allbeseitigung)

$(E)\quad \mathcal{A}_{[\alpha]} \to \exists\xi\mathcal{A}_{[\xi]}$

(Existenzeinführung)

$[\exists\xi\mathcal{A} =_{df} \neg\forall\xi\neg\mathcal{A}]$

Schlussregeln:

(MP) *modus ponens*

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}$$

(AG) *Allgeneralisierung*

$$\frac{B \to A_{[\alpha]}}{B \to \forall\xi A_{[\xi]}}$$

(falls α in der Konklusion nicht mehr vorkommt)

(EG) *Existenzgeneralisierung*

$$\frac{A_{[\alpha]} \to B}{\exists\xi A_{[\xi]} \to B}$$

(falls α in der Konklusion nicht mehr vorkommt)

Axiomatischer Beweis für: $\{\forall x \neg(Px \wedge Qx), \exists x Qx\} \Longrightarrow \exists x \neg Px$

1.	$\forall x \neg(Px \wedge Qx)$		Prämisse
2.	$\forall x \neg(Px \wedge Qx) \rightarrow \neg(Pa \wedge Qa)$		(A)
3.	$\neg(Pa \wedge Qa)$	1, 2	(MP)
4.	$\neg(Pa \wedge Qa) \rightarrow (Qa \rightarrow \neg Pa)$		(J)
5.	$(Qa \rightarrow \neg Pa)$	3, 4	(MP)
6.	$\neg Pa \rightarrow \exists x \neg Px$		(E)
7.	$(Qa \rightarrow \neg Pa) \rightarrow ((\neg Pa \rightarrow \exists x \neg Px) \rightarrow (Qa \rightarrow \exists x \neg Px))$		(J)
8.	$((\neg Pa \rightarrow \exists x \neg Px) \rightarrow (Qa \rightarrow \exists x \neg Px))$	5, 7	(MP)
9.	$(Qa \rightarrow \exists x \neg Px)$	6, 8	(MP)
10.	$(\exists x Qx \rightarrow \exists x \neg Px)$	9	(EG)
11.	$\exists x Qx$		Prämisse
12.	$\exists x \neg Px$	10, 11	(MP)

Kalkül des natürlichen Schliessens (Gentzen, Gentzen-Quine-Kalkül)

Regeln für einen aussagenlogischen Kalkül:

1. Prämisseneinführung (Hyp)

   Beliebige Annahmen α werden eingeführt, mit „hyp“ kommentiert und „*“ markiert; „*“ ist in jede Zeile zu übertragen, die sich auf α bezieht.

2. Regeln für die Einführung (I) (für *introduction*) und Elimination (E) der zweistelligen Junktoren:

$(I \wedge)$ $$\frac{\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$$

$(E \wedge)$ $$\frac{\alpha \wedge \beta}{\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}}$$

$(I \vee)$ $$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

$(E \vee)$ $$\frac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta \\ \alpha \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \gamma\end{array}}{\gamma}$$

$(I \rightarrow)$ $$\frac{\begin{array}{lll}* & \alpha & hyp \\ * & \beta & \end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$(E \rightarrow)$ $$\frac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \beta \\ \alpha\end{array}}{\beta}$$

3. Regeln für Negation und Widerspruch

$(E\neg)$ $$\frac{\begin{array}{c}\neg\alpha \\ \alpha\end{array}}{\bot}$$

$(I\neg)$ $$\frac{\begin{array}{ll}* & \alpha \\ * & \bot\end{array}}{\neg\alpha}$$

(EFQ) $$\frac{\bot}{\alpha}$$

(DN) $$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

4. Vereinfachende Zusatzregeln

(AL) *Bewiesene AL-Formeln und Tautologien dürfen ohne Stern hinzugefügt werden.*

(DEF) *Definierte Zeichen dürfen gemäss Definition eingeführt und eliminiert werden.*

$(\longmapsto *)$ $*_1 \dots *_n$ $$\frac{\beta}{((\alpha_1 \wedge \alpha_2) \dots \wedge \alpha_n)) \rightarrow \beta}$$

Beweise im Kalkül des natürlichen Schliessens

1. Beweis für: $\vdash p \rightarrow p \vee q$

1.	*	p		*hyp*
2.	*	$p \vee q$	1	$(I \vee)$
3.		$p \rightarrow p \vee q$	1, 2	$(I \rightarrow)$

2. Beweis für: $\vdash p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

1.	*	$p \wedge q$		*hyp*
2.	*	p	1	$(E \wedge)$
3.	*	q	1	$(E \wedge)$
4.	*	$q \wedge p$	3, 2	$(I \wedge)$
5.		$p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	1, 4	$(I \rightarrow)$

Beweis für: $(r \land q) \lor (\neg r \land q) \Longrightarrow q$

		*	1.	$(r \land q) \lor (\neg r \land q)$		*hyp*
	*		2.	$r \land q$		*hyp*
	*		3.	q	*2*	$(E \land)$
	*		3b.	r	*2*	$(E \land)$
			4.	$r \land q \rightarrow q$	*2, 3*	$(I \rightarrow)$
*			5.	$\neg r \land q$		*hyp*
*			6.	q	*5*	$(E \land)$
*			6b.	$\neg r$	*5*	$(E \land)$
			7.	$\neg r \land q \rightarrow q$	*5, 6*	$(I \rightarrow)$
		*	8.	q	*1, 4, 7*	$(E \lor)$

FIN